Definición: Si el segundo miembro de una ecuación expresada de la forma: y' = f(x,y) se puede expresar como una función que depende solamente de **x**, multiplicada por una función que depende solamente de **y**; entonces, la ecuación diferencial se llama separable. Es decir una ecuación es de variables separables si y solo si se puede escribir de la forma: **y' = g(x) p(y)**

La forma de resolver las ecuaciones por variables separables es la siguiente:

1. Operamos por 1/p(y) ambos lados de la ecuación por tanto se tiene: **(dy/dx)/p(y) = g(x)**

2. Por conveniencia sustituimos h(y)= 1/p(y), luego **h(y) (dy/dx) = g(x)**

3. Se sigue el paso al otro lado de la igualdad el diferencial dx, entonces ***h(y)dy = g(x) dx***

4. Se integra ambos lados de la igualdad por lo tanto:

5. Finalmente se obtiene: ***H(y) = G(x) +C***

6. La ecuación obtenida es generalmente una solución implícita.

Ejemplos de separación:

ECUACION DIFERENCIAL EN VARIABLES SEPARABLES

$$x^2 + 3y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad 3y\,dy = -x^2\,dx$$

$$(senx)\frac{dy}{dx} = \cos x \qquad dy = (\tan x)dx$$

$$\frac{x\frac{dy}{dx}}{e^y + 1} = 2 \qquad \frac{1}{e^y + 1}dy = \frac{2}{x}dx$$

EJEMPLO

Hallar la solución general de: **(x^2 + 4) dy/dx = xy**

Solución: Para empezar, observamos que y = 0 es una solución. Con el fin de hallar otras soluciones, supongamos y ¹ 0 y separamos las variables así:

$$\left(x^2 + 4\right) dy = xy\, dx$$ Forma diferencial

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2 + 4} dx$$ Separar variables

Integrando, obtenemos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2 + 4} dx$$ *Integrar*

$$Ln[[y]] = \frac{1}{2} Ln(x^2 + 4) + C_1$$

$$[[y]] = e^{C_1} \sqrt{x^2 + 4}$$

$$y = \pm e^{C_1} \sqrt{x^2 + 4}$$

Como también es solución, podemos escribir la solución general como:

$y = C\sqrt{x^2 + 4}$ ***Solución general***

Recuerde que en ciertos casos no es posible escribir la solución general en la forma explícita y=f(x), por tanto se puede utilizar la derivación explicita para verificar dicha solución.

Ejemplo: $x\, y dx + e^{x^2}(y^2 - 1)dy = 0$ donde y es diferente de 0

Donde la solución general es $e^{x^2} + y^2 - \ln y^2 = 2c$.

Ejemplo

Por el método de separación de variables encuentre la solución general de la ecuación diferencial y encuentre su solución particular.

y' + 2y = 2 Con la condición y= 1/2 si x = 4

Solución:

$\frac{dy}{dx} = 2 - 2y$ Entonces $\frac{dy}{2-2y} = dx$ integrando $\int \frac{dy}{2-2y} = \int dx$ se tiene:

$\ln\frac{[2-2y]}{2} = x + c$ Remplazando la condición inicial c = - 4 por tanto la solución particular es $\ln\frac{[2-2y]}{2} = x - 4$ (solución implícita).

Ejemplo

Hallar la ecuación de una curva que pasa por el punto (2,6) y tiene pendiente **y/x^2**

Solución: como la interpretación geométrica de la derivada es la pendiente de la curva entonces

$dy/dx = y/x^2$

Separando variables e integrando se llega a

$\int \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$ $y \neq 0$ Entonces $\ln[y] = -\frac{1}{x} + c$ donde $y = e^{-(1/x)+c} = ce^{-1/x}$ como **$y = 6$ y $x = 2$** entonces **$6 = C\, e^{-1/2}$** luego **$C = 6\, e^{1/2}$** por tanto la curva que se pide es **$y = 6\, e^{1/2}\, e^{-1/x}$** simplificando $y = 6e^{(1/2-1/x)}$